

SimSEE – Operación óptima de sistemas dinámicos con Aversión al Riesgo.

Primer versión: Ruben Chaer. Montevideo – Julio 2012. IIE-FING-UDELAR. Proyecto ANII-FSE-18-2009.

Revisión y mejoras: Pablo Soubes: Montevideo – Abril 2015 – ADME.

1. Introducción.

La operación óptima de un sistema dinámico implica el cálculo de una función que a partir del conocimiento del estado del sistema y de sus entradas determine el valor de las variables de control que conducen al sistema por la trayectoria óptima.

Cuando el sistema es de generación de energía eléctrica, la trayectoria óptima es habitualmente aquella que minimiza el valor esperado del Costo Futuro (CF) de operación. Este CF es la suma de los gastos en combustibles, importaciones y los costos que se le asignen a la energía no suministrada (costos de falla o racionamiento) menos los ingresos que tenga el sistema por venta de energía a otros países (exportaciones).

Teóricamente, cuando la función de costo representa todas las componentes reales del costo, minimizar el valor esperado de dicha función es el objetivo de la optimización. En la práctica hay situaciones no siempre bien captadas en la función de costo y que llevan a que se prefiera ser “más conservador” o Adverso al Riesgo. Uno de los motivos de esa aversión al riesgo es no caer en situaciones que por su baja probabilidad pesen poco en el valor esperado del costo de operación pero que en caso de ocurrir significan un trastorno que pueda tener consecuencias más que económicas sobre los administradores del sistema o sobre la economía del país. Claro está que siempre se puede discutir si esos eventos poco probables pero catastróficos no debieran incluirse reflejando ese “costo catastrófico” en una función de costo “bien formada”.

Este trabajo documenta una implementación realizada sobre la plataforma la plataforma de Simulación de Sistemas de Energía Eléctrica – SimSEE para el cálculo de la política de operación óptima de un sistema de generación hidro-térmico con un criterio de Aversión al Riesgo.

2. Programación Dinámica Estocástica con Histograma.

En esta sección se muestra, cómo modificar el algoritmo recursivo de la programación dinámica estocástica para que en lugar de calcular el valor esperado del Costo Futuro de operación (función de Bellman), calcule en cada estado del sistema, en cada etapa de tiempo, la función de distribución de probabilidad del Costo Futuro de operación. Dicha función la representaremos por un vector de muestras equi-probables ordenadas en forma decreciente. Esta representación, puede pensarse como un histograma particular donde la discretización se selecciona de tal forma en que todos los casilleros reciben una muestra.

La ec. 1 muestra la ecuación de evolución del estado del sistema. En donde x es el vector de variables de estado y como tal captura toda la información necesaria del pasado para calcular la evolución del sistema a partir del conocimiento de x y de las entradas del sistema a partir de un instante dado. Las entradas r y u son los vectores que representan el conjunto de entradas sobre las que no tenemos control y el vector de control u al cual el operador puede imponer los valores (cumpliendo con las restricciones que tenga el sistema para ello) para dirigir el sistema por el camino óptimo. La ec. 1 permite entonces calcular el estado x' al final de la etapa (o paso de tiempo) k a partir del conocimiento del estado x y de las entradas no controlables r al inicio de la etapa k .

$$x' = f(x, r, u, k) \quad (\text{ec. 1})$$

En la Fig 1 se muestra en forma esquemática la evolución del estado del sistema desde la posición x al inicio de la etapa k hasta el estado x' al final de la etapa bajo la influencia de las entradas no controladas r y de las entradas de control u .

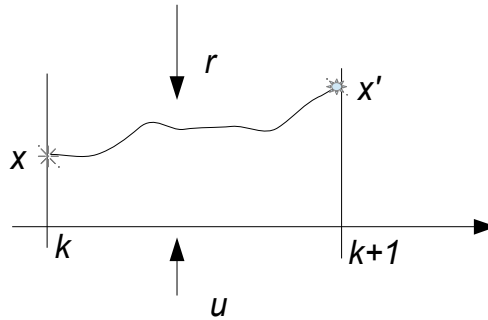


Fig. 1: Evolución del estado en un paso de tiempo.

En el tipo de sistema dinámico que estamos considerando supondremos que el vector de entradas r si bien “es no controlable”, es conocido al inicio de la etapa y es usado como información para el cálculo del mejor vector de control u a aplicar al durante la etapa.

Supondremos que el costo de operación del sistema es una función integral de los costos incurridos en cada etapa. Por ejemplo, en el sistema de generación de energía eléctrica (nuestro propósito) está formado por el gasto en combustibles + importaciones – exportaciones + costos de racionamiento en cada etapa. Dada una serie de entradas $R_k = \{r_j\}; j = k, k+1, \dots$ y una serie de control $U_k = \{u_j\}; j = k, k+1, \dots$ ambas a partir de la etapa k y conocido el estado del sistema al inicio de dicha etapa, la sucesión de estados $X_k = \{x_j\}; j = k, k+1, \dots$ es calculable usando la ecuación de evolución 1.

Sea $ce_k(x_k, u_k, r_k, k)$ el costo de la etapa k . El Costo Futuro a partir del estado x_k es calculable como: $CF(x_k, R_k, U_k) = \sum_{j=k}^{j=\infty} ce_j(x_j, u_j, r_j, j)$ sumatoria que puede escribirse en forma recursiva como: $CF(x_k, R_k, U_k) = ce_k(x_k, u_k, r_k, k) + CF(x_{k+1}, R_{k+1}, U_{k+1})$

Si el Operador del sistema, tiene una Política de Operación de la forma: $u_k = po(x_k, r_k, k)$ se puede eliminar la dependencia de la serie U_k en la ecuación recursiva anterior quedando:

$$CF(x_k, R_k) = ce_k(x_k, u_k, r_k, k) + CF(x_{k+1}, R_{k+1}) \quad (\text{ec. 2})$$

Estamos suponiendo que el operador conoce (x_k, r_k) para determinar cuál será el vector de control u_k que utilizará en la etapa k y que desconoce por completo el comportamiento futuro de las entradas no controlables R_{k+1} . Es así que el valor del Costo Futuro en el estado de

llegada (al final de la etapa k) es una variable aleatoria. El procedimiento clásico de optimización es considerar el valor esperado de dicha variable en el método que estamos proponiendo nos interesa tener una representación de la distribución de la variable para poder minimizar cosas tales como el valor con determinado riesgo de excedencia en lugar del valor esperado. Para tener una representación de $CF(x_{k+1}, R_{k+1})$ almacenaremos un muestreo de la Función de Distribución de la variable aleatoria CF guardando un número de muestras equiprobables. Para ello, definimos un parámetro que será la cantidad de muestras almacenadas en dicha representación que nombraremos: N_{mCF} (Número de muestras del Costo Futuro).

El algoritmo de optimización usa sorteos de Monte Carlo en cada etapa para generar un conjunto de r_k^h con $h=1, 2 \dots N_{Nsop}$ realizaciones posibles de las variables no controlables. Con cada uno de esos valores, el operador debe resolver cuál será el vector de control u_k que utilizará sabiendo que el sistema evolucionará de acuerdo con la ec. 1 y que el costo asociado a su decisión será el que surge de la ec. 2. Es así que en la resolución del paso a partir de un estado conocido x_k y para cada valor r_k^h obtenemos un valor del costo incurrido en la etapa $ce_k(x_k, u_k, r_k, k)$ y un valor del estado al final de la etapa aplicando la ecuación de evolución de estado x_k^h . A su vez, como el Costo Futuro en el estado de llegada, lo tenemos representado por N_{mCF} muestras equiprobables y que dependen solo del futuro (es decir están condicionadas sólo el estado al que se llega al final de la etapa y por información futura, no por los valores particulares (x_k, r_k, u_k)) se tendrá como costo futuro al inicio de la etapa k las combinaciones de los N_{mCF} costos futuros en cada estado de llegada posible x_k^h . Se tienen así, $N_{mCF} * N_{Nsop}$ valores equiprobables para $CF(x_k, R_k)$. Para mantener la representación de $CF(x_k, R_k)$ con N_{mCF} muestras equiprobables, en el algoritmo propuesto se procede a muestrear las $N_{mCF} * N_{Nsop}$ para obtener de ellas un conjunto reducido de N_{mCF} y poder continuar el cálculo recursivo de las representaciones de CF. En la implementación el muestreo para pasar de $N_{mCF} * N_{Nsop}$ a N_{mCF} muestras se realiza ordenando las $N_{mCF} * N_{Nsop}$ en forma decreciente y seleccionando luego N_{mCF} muestras distanciadas entre si N_{Nsop} comenzando con la primera lo más cercana posible a la mitad del intervalo de las primeras N_{Nsop} como se muestra en la figura.

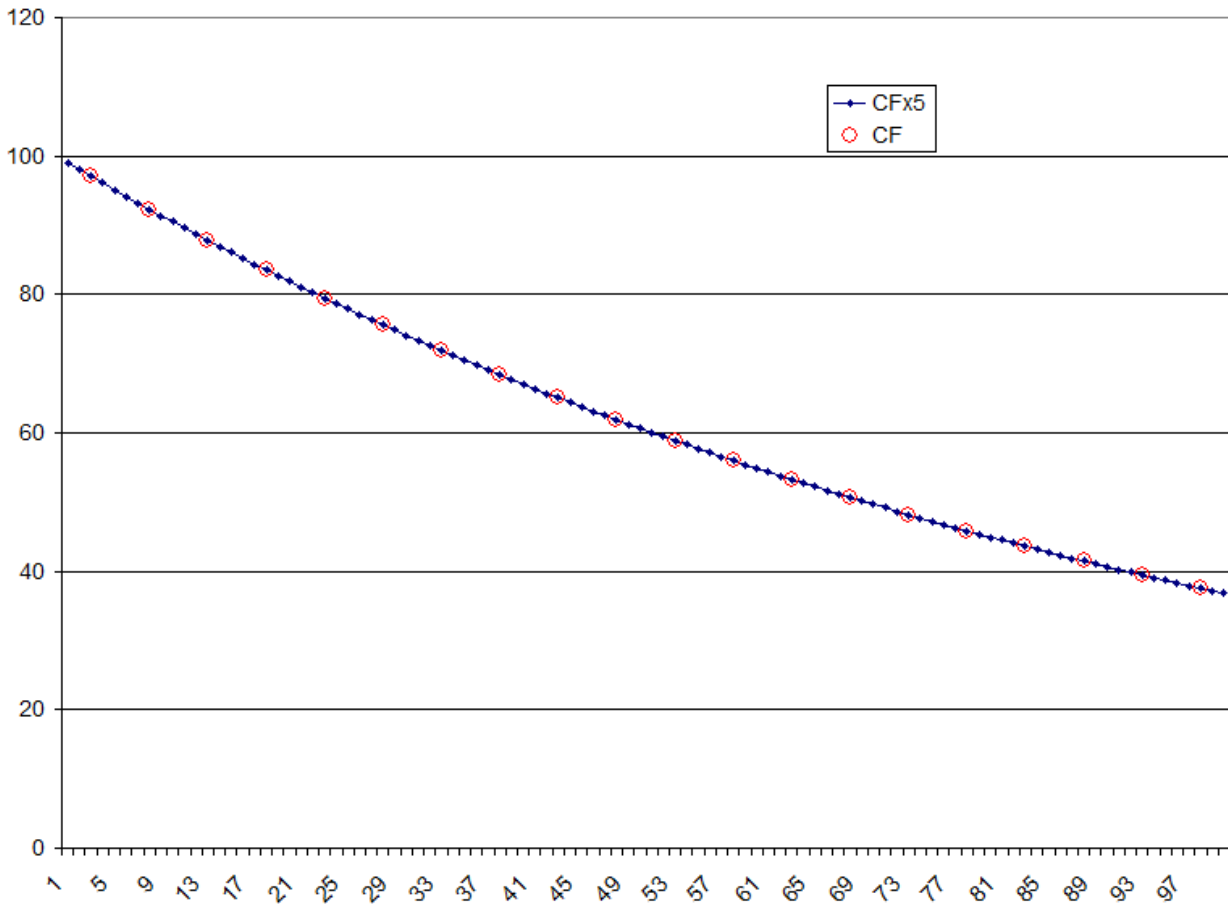


Fig. 2: Remuestreo de los histogramas de CF

En el caso de la fig. 2 la cantidad de puntos de representación de los histogramas de Costo Futuro es $N_{mCF}=20$ y la cantidad de sorteos de Monte Carlo por paso de optimización es

$N_{Nsop}=5$. La figura muestra para un estado de partida dado, en azul, los $N_{mCF} * N_{Nsop} = 100$ puntos equiprobables obtenidos en la resolución del paso ordenados en forma decreciente y con los círculos rojos, los $N_{mCF}=20$ que se seleccionan como representativos de la distribución del costo futuro $CF(x_k, R_k)$ para continuar con el algoritmo de optimización.

3. Valor en riesgo VaR y CVaR

Para dar generalidad a la medida de Riesgo, introducimos dos medidas de riesgo que se pueden calcular sobre una variable aleatoria y que son el VaR definido como valor que es excedido con determinada probabilidad de Excedencia y el CVaR definido como el valor esperado de los costos por encima de una determinada Probabilidad de Excedencia dada.

Dada una variable aleatoria $y \in D_y \subset \mathbb{R}^1$ con función densidad de probabilidad $p_y(y)$ y fijado valor de probabilidad de riesgo $u \in [0,1]$ definimos el VaR (Valor de y que es excedido con probabilidad u) y CVaR (Valor de y en Riesgo con probabilidad u) como:

$$VaR = Y \in D_y / P(y > Y) = u \quad (\text{ec. 3}) \text{ Valor con riesgo de ser excedido.}$$

$$CVaR = \int_{y=VaR}^{y=+\infty} y \cdot p_y \cdot dy \quad (\text{ec. 4}) \text{ Valor en Riesgo.}$$

El valor esperado de y es por definición: $VE = \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} y \cdot p_y \cdot dy$

La fig. 3 muestra un ejemplo. Corresponde a 100 muestras equiprobables del costo ordenadas en orden decreciente. Fijado como probabilidad de excedencia a los efectos de los valores de riesgo el 5%, en la figura se dibujó la recta vertical que separa el 5% de los valores mayores del resto. El valor con riesgo de ser excedido 5% es $VaR = 80 \text{ MUSD}$ y el valor en riesgo condicionado al 5% es el promedio de los valores mayores que VaR y es $CVaR = 88 \text{ MUSD}$. En la misma figura, el

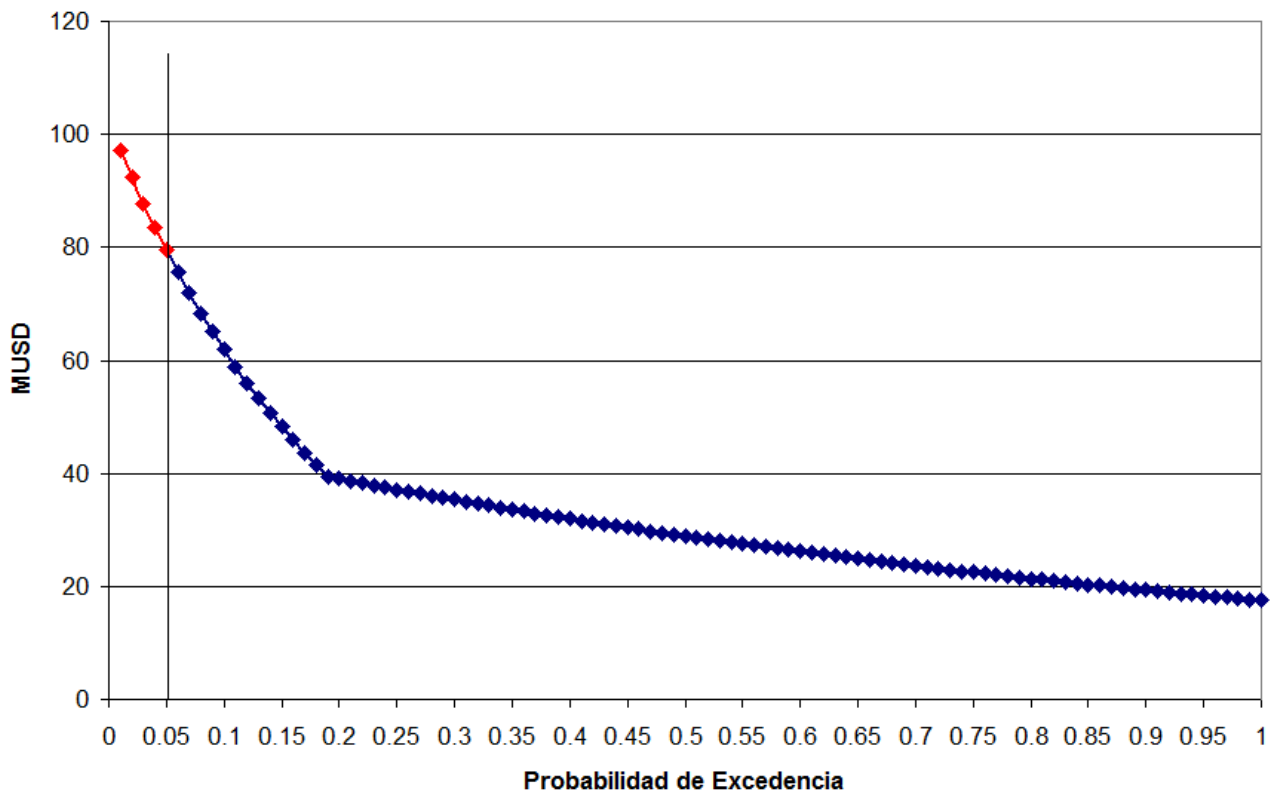


Fig. 3: Ejemplo de VaR y CVaR con riesgo 5%.

4. Función objetivo con Aversión al Riesgo.

En la sección 2 se mostró cómo construir en forma recursiva los histogramas de la función de costo futuro. Para ello, se supuso que el Operador del Sistema tiene una Política de Operación que le permite calcular el vector de control con como función del estado al inicio de la etapa, de la realización del vector de entradas no controlables y del tiempo (etapa k). $u_k = po(x_k, r_k, k)$

Diferentes funciones $u_k = po(x_k, r_k, k)$ llevarán a diferentes operaciones del sistema. Estas operaciones se pueden clasificar en más o menos “exitosas” si se dispone de una medida del mérito de la operación. La función de mérito clásica es el valor esperado del costo incurrido en la operación y como se mencionó en la introducción el propósito del presente trabajo es plantear una función de mérito alternativa que nos permita tener en cuenta la Aversión al Riesgo que pueda tener

el operador.

En el extremo, un operador que sea MUY Adverso al Riesgo no mirará el valor esperado del costo de operación futura sino que intentará minimizar el valor máximo de ese costo. Es decir que en lugar de minimizar el promedio de los valores de los histogramas (lo que es una estimación del valor esperado) intentará minimizar el máximo de los valores de los histogramas.

Fijada una probabilidad de excedencia para medida del riesgo (habitualmente 5%) diremos que el operador es 100% adverso al riesgo si como objetivo de la optimización intenta minimizar el valor en riesgo $CVaR$ (o VaR , según la medida de riesgo que se quiera utilizar) y diremos que es 0% adverso al riesgo si opera minimizando el valor esperado VE .

Definiendo un Coeficiente de Aversión al Riesgo $CAR \in [0, 1]$ podemos definir la función objetivo de la operación con ese nivel de aversión al riesgo como:

$$J = CAR \cdot CVaR + (1 - CAR) \cdot VE \quad (\text{ec. 5}).$$

Ahora mostraremos la aplicación de esta función de costo con aversión al riesgo sobre el algoritmo de programación dinámica estocástica para obtener la política óptima de operación de un sistema dinámico minimizando el Costo Futuro de operación con un coeficiente de aversión al riesgo dado.

Conocido el estado al inicio de un paso de tiempo, y una realización del vector de entradas no controladas y aplicando el procedimiento descrito en la sección 2 es posible calcular en forma recursiva una representación de la función de distribución del Costo Futuro para cada estado del sistema. Esa representación nos permite evaluar la función objetivo ec. 5 en el estado de llegada $x' = f(x, r, u, k)$ y obtener así el vector de control u que logra minimizar el costo de la etapa $ce_k(x_k, u_k, r_k, k)$ más el objetivo al punto de llegada $J(x', k+1)$

Observar que dada una realización r_k minimizar la suma $ce_k(x_k, u_k, r_k, k) + J(x', k+1)$ es minimizar el costo de la ecuación 5. Conocido el par (x_k, r_k) y para cada valor de u_k se calcula $ce_k(x_k, u_k, r_k, k)$ y $x' = f(x_k, u_k, r_k, k)$.

5. Modificaciones introducidas a inicios de 2015.

En la versión de SimSEE “v106_Garufa” se introducen dos mejoras al algoritmo de optimización con Aversión al Riesgo consistentes en un “Re-muestreo con Extremos” y en una “Compensación del Valor Esperado” que se explican a continuación.

(a) Remuestro con Extremos.

El Remuestro con Extremos, consiste en considerar un remuestro uniforme de los histogramas pero que obligue a mantener una muestra en cada uno de los extremos.

En la Fig.2 se muestra el remuestro uniforme sin mantener los extremos. Como se puede ver se pierden en ese caso los valores extremos obtenidos. En la Fig.4 se muestra el mecanismo de Remuestro con Extremos. Para facilitar la interpretación se muestra en color verde la curva del histograma sin remuestrear, en color azul (y líneas verticales hacia abajo) el remuestro uniforme coincidente con el de la Fig.2 y en color rojo (y líneas verticales hacia arriba) el remuestro con Extremos incorporado como mejora.

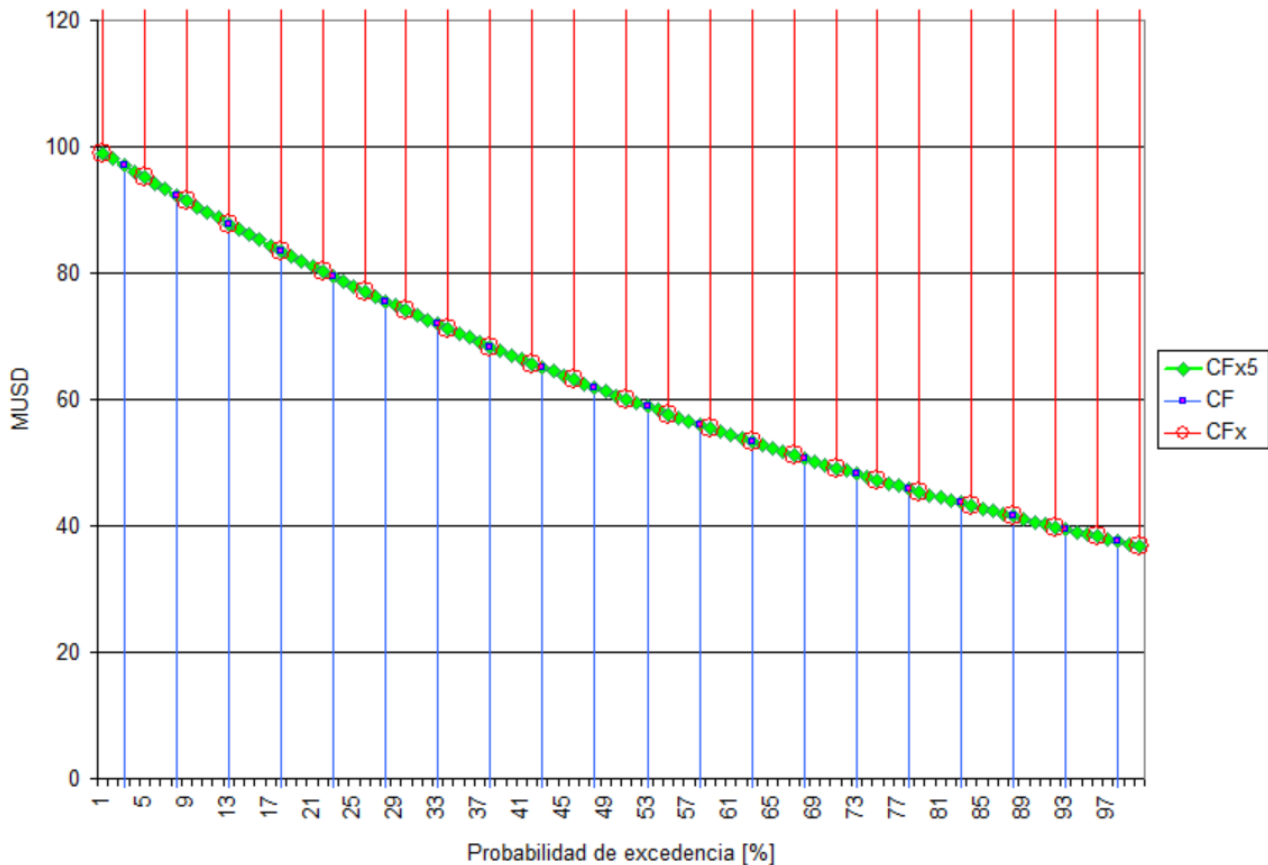


Fig. 4: Remuestreo con Extremos.

(b) **Compensación del Valor Esperado.**

En las pruebas realizadas, se constató que había diferencias en el costo futuro esperado entre la optimización sin Aversión al Riesgo (esto es la Programación Dinámica Estocástica Clásica, sin la activación del mecanismo de histogramas de Costo Futuro y operando directamente sobre el valor esperado del Costo Futuro) y la optimización con Aversión al Riesgo activada (llevando histogramas) aunque se seleccione un Coeficiente de Aversión al Riesgo (CAR) nulo. Estas diferencias se deben a la acumulación de errores introducidos por el remuestreo de los histogramas que hace que el Valor Esperado (llevado sin histogramas) no coincida con el Valor Esperado de los histogramas. Como el algoritmo de programación dinámica estocástica aplicado sobre el sistema de generación hidro-térmico es del tipo “integrador” siendo el amortiguamiento principal del algoritmo el introducido por la consideración de una tasa de descuento, las pequeñas diferencias introducidas por el remuestreo se propaga en el algoritmo produciendo diferencias apreciables en el valor absoluto de la función de Costo Futuro $CF(x, k)$. Es importante destacar que estas diferencias

en valor absoluto $CF(x, k)$ no necesariamente implican que las derivadas $\frac{\partial CF(x, k)}{\partial x}$ y es en

estas derivadas que se encuentra la información que importa en la determinación de la Política de Operación.

La acumulación de diferencias antes mencionadas es independiente del mecanismo de remuestreo. Para poder tener funciones $CF(x, k)$ iguales para el caso de $CAR=0$ y el caso de desactivar la Aversión al Riesgo, se introduce en el remuestreo una compensación donde se resta de las muestras seleccionadas para el histograma remuestreado la diferencia entre los valores esperados del histograma sin remuestrear y el promedio de las muestras de forma de mantener el valor esperado.

6. Resultados.

Se presentan a continuación los resultados obtenidos a partir de las simulaciones realizadas. El período de estudio está comprendido entre el 01/07/2015 y el 31/12/2016.

En la Fig.1 se muestra el costo total incurrido en la operación del sistema para cada crónica de simulación, con y sin CAR.

Se resume en la tabla siguiente las diferencias de los costos totales en valor esperado y para el 5% de las peores crónicas.

Se destaca que el valor esperado del costo total para el caso con CAR aumenta en menos de un 1% con respecto al caso sin CAR, y el promedio del costo para el 5% de las peores crónicas disminuye en aproximadamente un 4% correspondientemente.

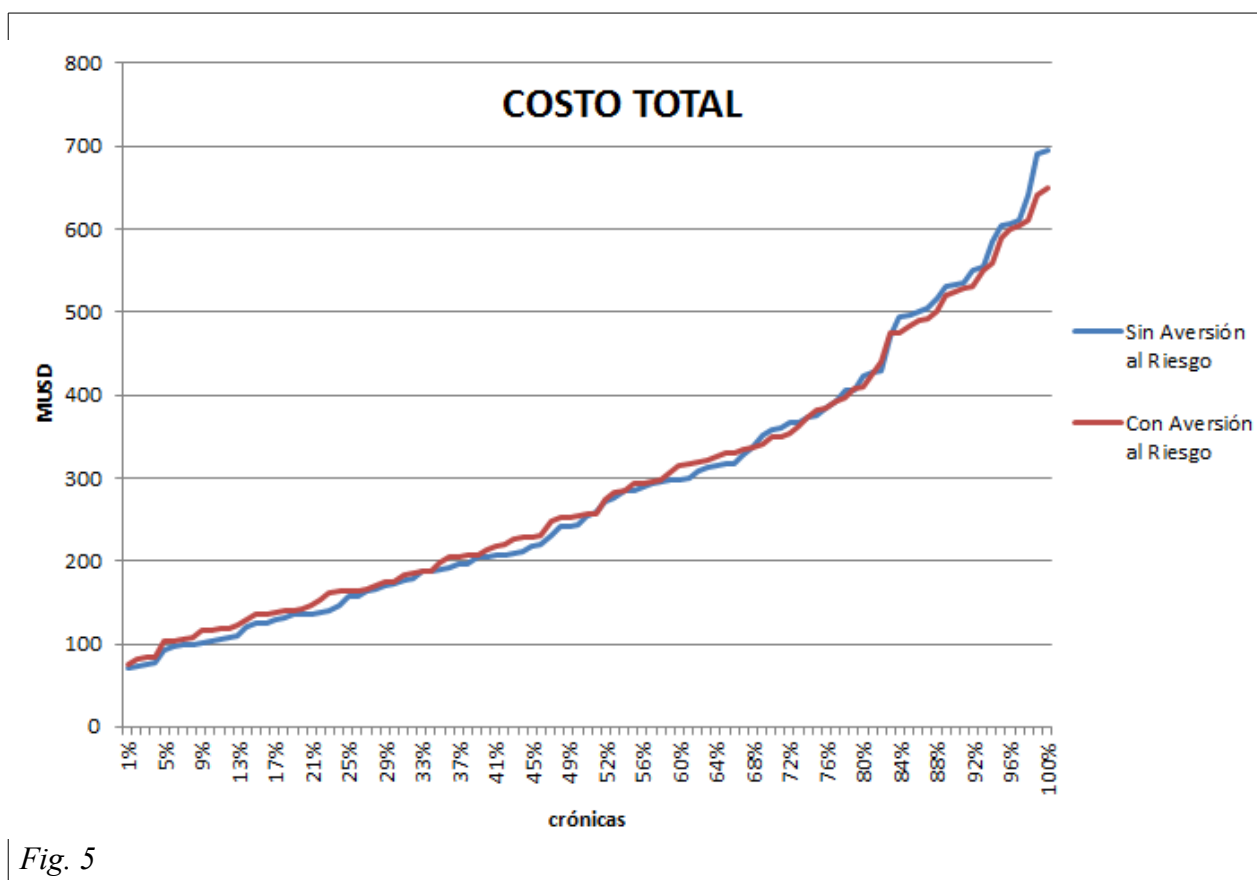


Fig. 5

	Sin CAR (MUSD)	Con CAR (MUSD)	Diferencia (MUSD)	Diferencia (%)
Costo total esperado	287	289	2	0,7
Costo total de 5% peores casos	649	621	-27	-4,2

En la Fig. 2 se muestra el manejo de la cota de Bonete en promedio y con probabilidad de excedencia 95% (Pe 95%) para los casos de estudio con y sin CAR, para el período de simulación.

Se destaca que en promedio se tiene un uso más conservador del lago para el caso con CAR. Para los valores de Pe 95% se observa que el caso con CAR vacía el lago (llega a cotas de 70 m) recién en el mes de abril de 2016 y para el caso sin CAR se llega al fondo del lago en octubre del 2015.

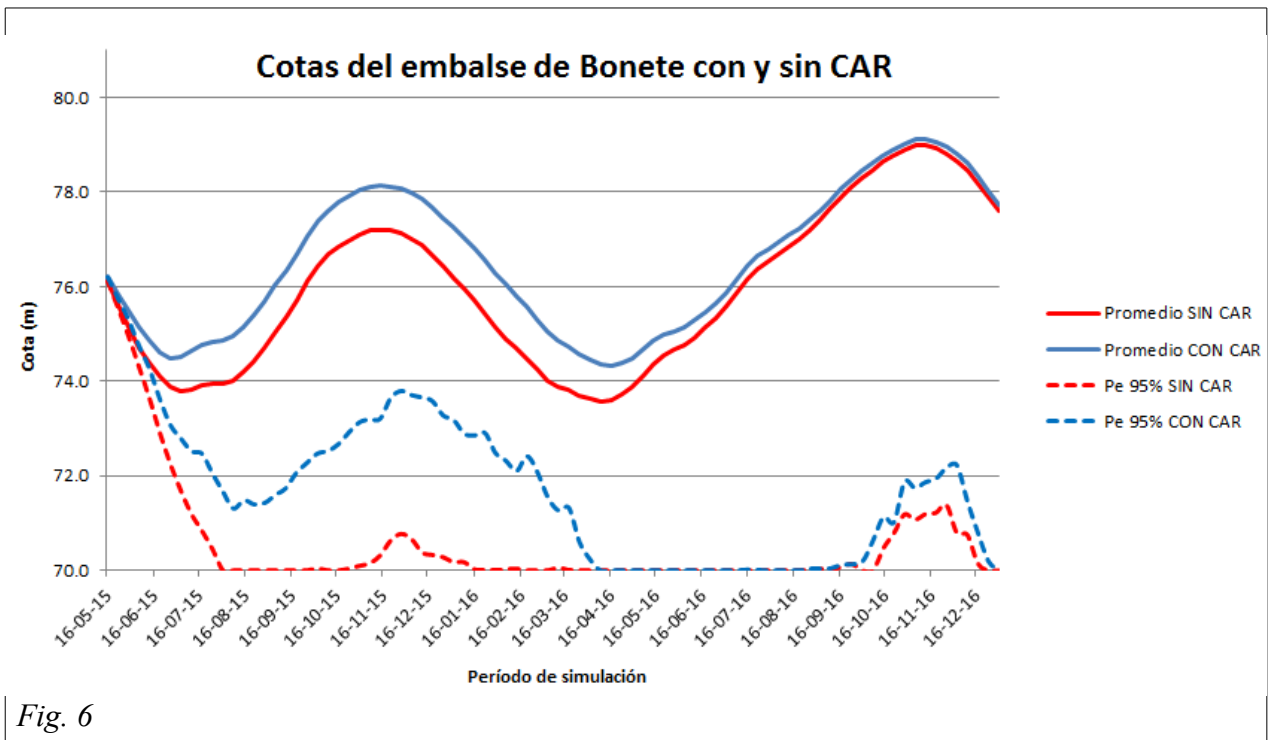


Fig. 6